

## 有限元计算中应力集中问题解决方法\*

## Solving Method for the Stress Concentration Problem in FEA

郑州航空工业管理学院 赵 健  
新乡学院 张国智

[摘要] 针对应力集中问题,研究有限元计算中优化模型的方法。综合分析具有应力集中孔薄板在不同工况下(单向拉伸、双向拉伸、拉压复合)的不同单元密度和单元质量,提出了优化有限元模型的方法。此外,对某旋转机械中转盘的切向应力进行了计算,与子模型有限元方法的计算结果进行比较,验证了提出的优化有限元模型方法的合理性。

关键词: 应力集中 有限元模型 单向拉伸 双向拉伸 拉压复合 子模型

[ABSTRACT] The method of optimizing the finite element model (FEM) for the stress concentration is studied. Through comparing the results of different element density and element quality of the sheet with hole under the load (simple tension, biaxial tension, tension and compression), the method of optimizing the finite element model is proposed. Moreover, tangential stress of rotor plate of the rotary machine with the method is proposed in the paper, which is verified through comparing the results of the rotor plate with sub-modeling method.

**Keywords:** Stress concentration FEM Simple tension Biaxial tension Tension and compression Sub-modeling

随着计算机技术的飞速发展,近年来数值计算技术在工程中得到了广泛应用,就其实用性和应用的广泛性来说,主要还是有限元法<sup>[1]</sup>。实际上有限元分析已成为替代大量实物试验的数值化“虚拟试验(virtual test)”<sup>[2]</sup>。计算机模拟具有优化试验、节约开发周期、降低试验成本等优点,将在新产品试制中担任重要的角色,对它的研究具有较大的实际意义<sup>[3]</sup>。对复杂的非线性接触和碰撞的整机有限元分析,需要建立适于工程应用

\* 河南省教育厅自然科学研究计划项目(2007460023)资助。

的有限元模型<sup>[4-5]</sup>,既要保证计算精度又要有较高的计算效率。可见,划分网格是建立有限元模型的一个重要环节,它要求考虑的问题较多,需要的工作量较大,所划分的网格形式将对计算精度和计算规模产生直接影响。为建立正确、合理的有限元模型,划分网格时必须考虑一些基本原则<sup>[6]</sup>。由于应力集中的影响,单元密度和单元质量对计算结果均有较大影响,本课题结合弹性力学理论和有限元法的特点对此进行了较深入、系统的研究。

## 1 板中圆孔应力集中的分析

对受不同形式载荷的具有应力集中孔的薄板,包括图1所示的单向拉伸、双向拉伸、拉压复合进行研究,中心孔 $2a=20\text{mm}$ ,板长和宽分别为 $200\text{mm}$ 和 $80\text{mm}$ ,均布载荷 $|q|=10\text{N/mm}$ 。应用有限元法计算了不同单元密度和不同单元划分方法下的数值试验,由于结构的对称性,只对板的1/4进行有限元计算,数值试验如表1所示。

## 1.1 单向拉伸

按表1中的数值试验对图1(a)所示的薄板进行计算。根据有限元分析法和弹性力学理论分别计算沿 $y$ 轴 $a$ 、 $2a$ 、 $3a$ 、 $4a$ 处的切向应力,对比曲线如图2所示。在 $2a$ 到 $4a$ 处,无论单元形状及单元密度如何,有限元

表1 数值试验计算表

编号	单元总数	节点总数	1/4圆孔分段数	平均单元尺寸/mm	圆孔附近单元纵横比	孔附近单元划分方法
1	145	172	4	10	2.5	自由网格
2	302	341	8	5	2.5	自由网格
3	1 285	1 362	16	2.5	2.5	自由网格
4	5 303	5 456	32	1.25	2.5	自由网格
5	19 360	19 665	64	0.625	2.5	自由网格
6	186	217	8	5	1.4	自由网格
7	1 291	1 364	8	2.5	1.3	自由网格
8	122	147	8	2.5	1.3	映射网格

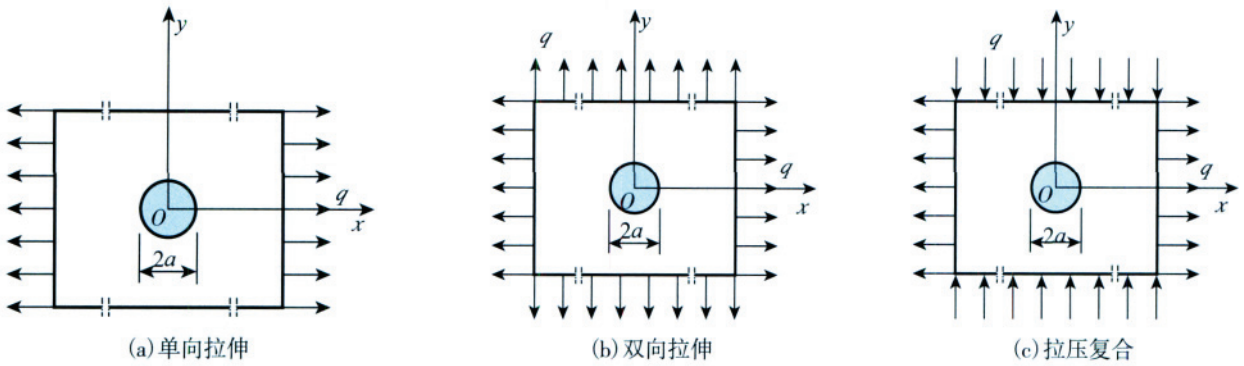


图1 圆孔板拉伸类型

Fig.1 Kinds of tension of the sheet with the hole

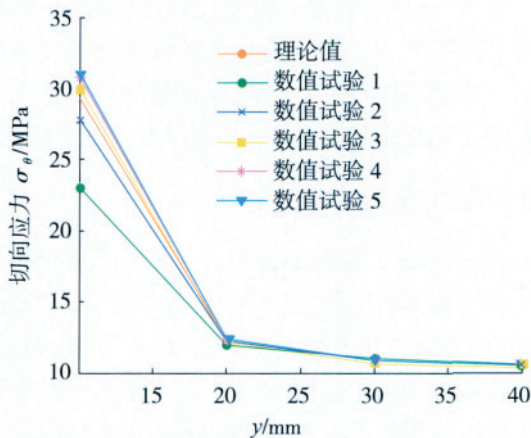


图2 单向拉伸中不同单元密度的切向应力计算结果与理论值对比曲线

Fig.2 Comparison curves of FEA result and theoretical value of tangential stress at different element density in simple tension

分析结果和理论值的最大误差小于 4%，这主要是因为此区域内应力集中较小。在应力最集中的  $a$  处，单元密度最稀疏(数值试验 1)时，两者的误差达到 23%。可见，在应力集中区域，单元密度较稀疏时有限元计算结果的误差较大；随着单元密度的增加，计算误差呈现先减小后增大的趋势。当圆孔单元密度从 16 段增加到 64 段时，最大误差为 3.4%；当圆孔单元密度为 16 段时误差最小，为 0.2%。可见，不是单元密度越密计算结果越准确，当单元密度增加到一定程度时，计算精度不会有明显提高。因此，采用数值试验 3 进行计算时最合理，其最大计算误差不超过 3%。

单向拉伸时数值试验 2、6、7、8 的计算结果如表 2 所示，主要对比了应力集中孔处的最大切向应力和最小切向应力与弹性力学的理论计算值的差异。由表 2 中

可见，孔的单元密度同为 8 段，单元质量不同时，在应力集中点的有限元计算误差不同，当单元的纵横比为 1.3 时，无论是映射网格还是自由网格，误差均小于 5%。当单元为映射网格时，单元数量最少，但计算精度总体较高，可见，选择数值试验 8 进行计算时最合理，既保证了计算精度又减少了计算量。

### 1.2 双向拉伸

对图 1 (b) 所示的薄板按表 1 中的数值试验进行计算，根据有限元分析法和弹性力学理论计算沿  $y$  轴  $a$ 、 $2a$ 、 $3a$ 、 $4a$  处的切向应力，对比曲线如图 3 所示。在单元最稀疏的数值试验 1 中，应力集中点  $a$  处的误差较大，其他点处的计算精度均满足计算要求。当圆孔单元密度从 8 段增加到 64 段时，最大计算误差小于 2%，这主要是由于应力集中程度较单向拉伸时小。考虑到计算量，采用数值试验 2 进行计算即可。

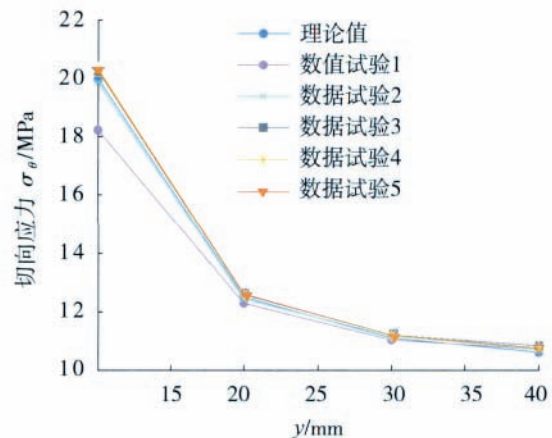


图3 双向拉伸中不同单元密度的切向应力计算结果与理论值对比曲线

Fig.3 Comparison curves of FEA result and theoretical value of tangential stress at different element density in biaxial tension

表2 最大和最小切向应力数值试验计算结果与理论值的比较

载荷情况	编号	最大切向应力			最小切向应力		
		理论值/ MPa	计算值/ MPa	误差/ %	理论值/ MPa	计算值/ MPa	误差/ %
单向拉伸	2	30	27.834	7.2	-10	-8.042	19.6
	6		30.080	0.3		-9.240	7.6
	7		29.524	1.6		-9.518	4.8
	8		29.810	0.6		-9.569	4.3
双向拉伸	2	20	19.827	0.9	无最小切向应力		
	6		20.477	2.4			
	7		20.009	0.05			
	8		20.280	0.6			
拉压复合	2	40	35.841	10.4	-40	-36.171	9.6
	6		39.684	0.8		-39.059	2.4
	7		39.039	2.4		-39.328	1.7
	8		39.341	1.6		-39.663	0.8

双向拉伸时数值试验 2、6、7、8 的计算结果如表 2 所示,由表 2 可见,孔的单元密度同为 8 段,当单元质量不同时,在应力集中点的有限元计算误差不同,单元质量对计算结果的影响较单向拉伸时要小。此外,考虑到计算量,选择数值试验 8 进行计算最为适宜。

### 1.3 拉压复合

对图 1 (c) 所示的薄板按表 1 中的数值试验进行计算,根据有限元分析法和弹性力学理论计算沿  $y$  轴  $a$ 、 $2a$ 、 $3a$ 、 $4a$  处的切向应力,对比曲线如图 4 所示。从图 4 可见,在  $2a$  到  $4a$  处,无论单元形状及单元密度如何,有

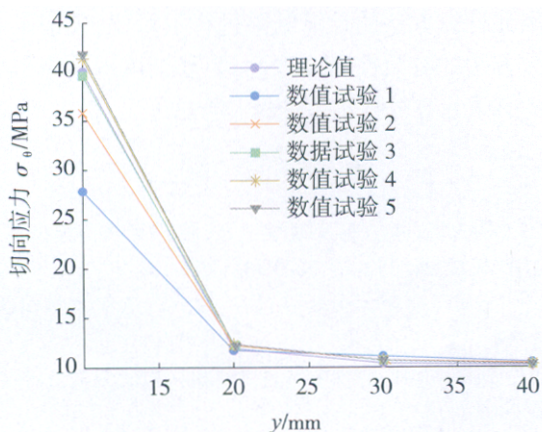


图4 拉压复合中不同单元密度的切向应力计算结果与理论值对比曲线

Fig.4 Comparison curves of FEA result and theoretical value of tangential stress at different element density in tension and compression

限元分析结果和理论值的最大误差小于 4%。在应力最集中的  $a$  处,单元密度最稀疏(数值试验 1)时,两者的误差达到 30%。可见,在应力集中区域,单元密度较稀疏时有限元计算结果的误差较大;随着单元密度的增加,计算误差呈现先减小后增大的趋势。当圆孔单元密度增加到 64 段时,最大误差为 4.4%,由此可知,单元密度和单元质量对拉压复合计算结果的影响较单向拉伸和双向拉伸大。这主要是因为,在薄板拉伸中,拉压复合情况下的应力集中程度最大。因此,可采用数值试验 3 进行计算。

拉压复合时数值试验 2、6、7、8 的计算结果如表 2 所示,由表 2 可见,孔的单元密度同为 8 段,单元纵横比为 1.4 时,无论是映射网格还是自由网格,误差均小于 3%。综合考虑计算精度和计算量,选择数值试验 8 进行计算最为适宜。

## 2 应力集中问题优化有限元模型的方法

通过对孔应力集中问题的分析可知,要提高应力集中区域的计算精度并且保证计算效率,应该综合考虑单元密度和单元质量,同时在提高计算效率方面,要合理选择应力集中区域。由前面的分析可知,在应力最集中的拉压复合中选择 4 倍圆孔半径的圆域范围内进行单元加密已经足可,圆孔单元划分尺寸为圆周的  $1/32$ ,并选择纵横比小于 1.3 的映射网格划分最为适宜。

## 3 典型应用案例分析

对某旋转机械中转盘的应力分布进行计算。该转盘在高速旋转中受离心惯性载荷作用,因此在分析中施加角速度惯性载荷,该转盘有 6 个应力集中孔,由于对称性对其  $1/4$  进行计算,其有限元模型如图 5 (a) 所示。圆孔单元划分尺寸取圆周的  $1/32$ ,圆孔附近单元的纵横比取 1.3,扩展的有限元计算结果如图 5 (b) 所示。

为验证单元划分是否合理、计算结果是否准确,采用子模型有限元分析方法对该转盘进行分析。对应力集中的孔 1 和孔 2 均进行分析,子模型分析的有限元模型如图 6 所示。圆孔附近的区域半径取 4 倍的孔半径,子模型分析的计算结果如图 7 所示。对比图 5 和图 7 可知,两孔应力分布趋势和应力集中位置均与整体分析基本相同。对孔 1,应力集中位置两者的误差为 1.7%;对孔 2,应力集中位置两者的误差为 2.2%。可见,转盘的单元划分合理,单元密度适中,这也表明了应用本研究中的处理应力集中问题的单元划分方法的有效性和

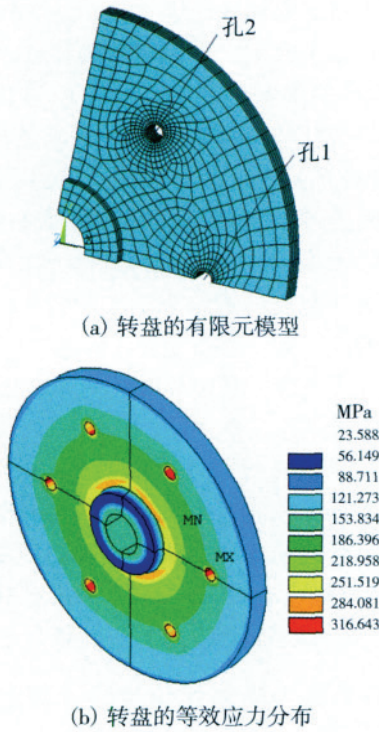


图5 转盘的有限元模型及分析结果  
Fig.5 Finite element model and FEA result of the rotor plate

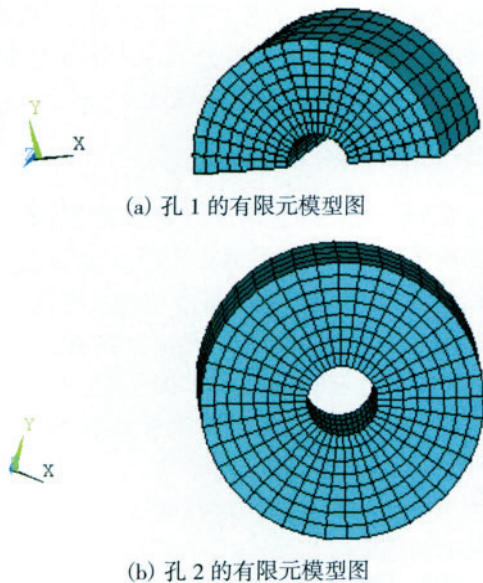
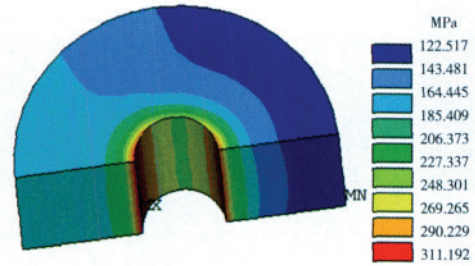


图6 转盘孔的子模型分析有限元模型  
Fig.6 Sub-modeling FEA model of the rotor plate hole

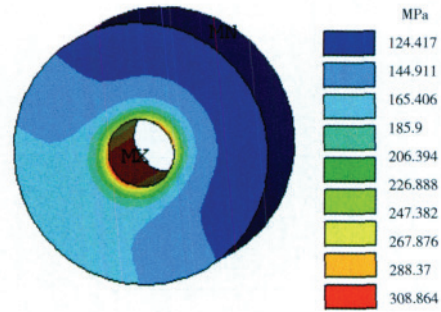
合理性。

#### 4 结束语

针对圆孔应力集中问题,本课题根据有限元法的特



(a) 孔1的等效应力分布



(b) 孔2的等效应力分布

图7 转盘孔的子模型有限元分析结果

Fig.7 Sub-modeling FEA result of the rotor plate hole

点并结合弹性力学理论,计算了带有应力集中孔板在单向拉伸、双向拉伸、拉压复合载荷工况下的切向应力,分析了应力集中孔附近单元密度和单元质量对计算精度的影响,并在此基础上提出了圆孔附近单元划分原则,为应力集中问题提供了优化有限元模型的方法。针对某旋转机械中的转盘,应用本课题提出的应力集中孔的单元划分方法对其切向应力进行了计算,并与应用子模型有限元计算方法的计算结果进行了对比,验证了该单元划分方法的有效性和合理性,为复杂机构中应力集中问题的有限元计算提供了依据和方法。

#### 参 考 文 献

- [1] 杨先海,褚金奎,尹明富,等. 有限元数值模拟技术及工程应用. 机械设计与制造,2003 (3): 107-108.
- [2] 曾攀. 有限元分析及应用. 北京:清华大学出版社,2004: 1-3.
- [3] 钱锋,张治. 汽车零部件计算机模拟疲劳试验研究. 学术论坛,2002 (4): 15-17.
- [4] 张之敬,张国智,金鑫. 基于制造特性的微小型擒纵机构有限元仿真. 北京理工大学学报, 2007,27 (10): 859-863.
- [5] 张国智,张之敬,赵婷. 基于制造特性的微小型钟表机构有限元仿真. 北京理工大学学报,2006,26 (9): 781-784.
- [6] 杜平安. 有限元网格划分的基本原则. 机械设计与制造,2000 (1): 34-36.

(责编 良辰)